

# Sulla stabilità del problema planetario dei tre corpi

*ANTONIO GIORGILLI*

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano,  
Via Saldini 50, 20133 — Milano.

*UGO LOCATELLI*

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”,  
Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma.

## Sommario

Si discute se il celebre teorema di Kolmogorov sulla persistenza di moti quasi periodici si applichi al sistema solare, prendendo a modello il problema dei tre corpi nel caso in cui le masse ed i parametri orbitali siano quelli di Sole, Giove e Saturno. Facendo ricorso a metodi di manipolazione algebrica al calcolatore si mostra per la prima volta che almeno in questo caso il teorema si può applicare, e dunque che le orbite dei due pianeti maggiori, almeno nell'approssimazione del problema dei tre corpi, giacciono in prossimità di tori invarianti di Kolmogorov. Si discutono poi brevemente le possibili estensioni di questo lavoro accennando alla possibilità di affrontare il problema classico della stabilità del sistema solare alla luce della teoria della stabilità esponenziale alla Nekhoroshev.

We discuss the applicability to the solar system of the celebrated theorem of Kolmogorov on the persistence of quasi periodic motions, considering the problem of three bodies with masses and orbital parameters of the Sun–Jupiter–Saturn system. We use algebraic manipulations in order to show that the theorem applies to that model, thus showing for the first time that the orbits of the two biggest planets are close to invariant Kolmogorov's tori. We include a short discussion concerning further developments and in particular on the possibility of tackling the classical problem of the stability of the solar system in the framework of Nekhoroshev's theory on exponential stability.

# 1 Introduzione

Tra i problemi classici che hanno lasciato una traccia profonda nella storia della Meccanica da Newton in poi quello della stabilità del sistema solare occupa certamente un posto di grande rilievo ed ha suscitato l'interesse dei più grandi matematici, che a più riprese vi si sono cimentati. È in quest'ambito che si è sviluppata la teoria classica delle perturbazioni ed in particolare i numerosi tentativi di rappresentare le soluzioni delle equazioni di Newton per il sistema planetario sotto forma di funzioni quasi periodiche, in parole povere con lo strumento degli epicicli che ha dominato tutta la storia dell'astronomia classica.

Nel 1954, al Congresso Internazionale dei Matematici di Amsterdam, Kolmogorov annunciò un teorema<sup>[9]</sup> che Arnold, circa dieci anni dopo,<sup>[1]</sup> ebbe a descrivere come “A simple and novel idea, the combination of very classical and essentially modern methods, the solution of a 200 year-old problem...”. Non è raro trovare nella letteratura scientifica degli anni successivi l'affermazione che quel teorema potesse fornire la prova che i moti planetari sono effettivamente rappresentabili come moti quasi periodici.<sup>[15]</sup> Il problema della stabilità del sistema solare avrebbe così trovato soluzione.

Tali previsioni si rivelarono però troppo ottimistiche: a cinquant'anni di distanza da quell'annuncio dobbiamo constatare che una dimostrazione che il teorema di Kolmogorov sia effettivamente applicabile al sistema solare non esiste ancora.

In questa nota vogliamo illustrare i risultati di un lavoro di ricerca recente che a nostro avviso costituiscono un argomento convincente, anche se non ancora completamente rigoroso, a favore dell'applicabilità del teorema di Kolmogorov almeno al problema classico dei tre corpi, quando le masse e le condizioni iniziali siano quelle del sistema Sole–Giove–Saturno.

Il problema è stato affrontato più volte nel corso degli ultimi vent'anni sia con metodi esclusivamente analitici, sia facendo ricorso agli sviluppi in serie della teoria delle perturbazioni svolti con tecniche di manipolazione algebrica al calcolatore. Tuttavia in tutti i casi gli autori hanno dovuto ricorrere a modelli in cui venivano modificate le masse e le orbite, al fine di ridurre le perturbazioni mutue tra i pianeti.<sup>[18][19][11]</sup> Il lavoro che intendiamo esporre si distingue proprio perché i parametri sono quelli del sistema reale, così come forniti dagli astronomi. L'esposizione è necessariamente sintetica, in quanto il calcolo completo richiede l'applicazione di concetti e metodi che sfruttano l'esperienza accumulata in oltre due secoli di sviluppo della teoria delle perturbazioni, ai quali si aggiungono tecniche ideate appositamente per questo lavoro.

Nel paragrafo 2 richiamiamo l'enunciato del teorema di Kolmogorov e il problema della sua applicabilità al modello dei tre corpi o al sistema solare. Il paragrafo 3 contiene un'esposizione sintetica del procedimento da noi seguito, esposto in forma applicabile genericamente al problema dei tre corpi quando una delle masse sia preponderante rispetto alle altre due. In questo senso parliamo di sistema planetario dei tre corpi. Il paragrafo 4 è dedicato ad alcuni dettagli tecnici riguardanti in modo specifico l'applicazione al sistema Sole–Giove–Saturno. Infine nel paragrafo 5 discutiamo brevemente i possibili sviluppi delle ricerche sulla stabilità del sistema solare tenendo conto delle possibilità offerte dalla teoria della stabilità esponenziale di Nekhoroshev.

## 2 Il teorema di Kolmogorov

Per comprendere il teorema occorre far riferimento a quello che Poincaré chiamava “il problema generale della dinamica”. Si considera un sistema meccanico con  $n$  gradi di libertà descritto da un'Hamiltoniana della forma

$$H(p, q) = h(p) + \varepsilon f(p, q) , \quad (1)$$

dove  $(q, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$  sono variabili d'angolo–azione,  $\mathcal{G}$  è un aperto, ed  $\varepsilon$  è un piccolo parametro che supporremo positivo. Si suppone che l'Hamiltoniana sia analitica in tutte le sue variabili. Nel caso  $\varepsilon = 0$ , o *imperturbato*, si ha un sistema integrabile: le azioni  $p$  del sistema restano costanti, mentre gli angoli  $q$  evolvono uniformemente nel tempo come  $q(t) = q_0 + \omega(p)t$ , dove  $\omega(p) = \frac{\partial h}{\partial p}$  sono le frequenze. Con linguaggio geometrico si dice che lo spazio delle fasi ammette una foliazione in tori invarianti  $\mathbb{T}^n$ , parametrizzati dalle azioni  $p$ , e che il flusso su tali tori è quasi periodico.

Parafrasando l'enunciato della nota di Kolmogorov [9], vale il seguente

**Teorema:** *Consideriamo l'Hamiltoniana*

$$H(p, q) = \sum_j \lambda_j p_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} C_{j,k}(q) p_j p_k + \varepsilon A(q) + \varepsilon \sum_j B_j(q) p_j + O(p^3) , \quad (2)$$

e supponiamo che il determinante della matrice con elementi

$$\overline{C}_{jk} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} C_{jk}(q) dq_1 \dots dq_n$$

non si annulli. Supponiamo che  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  soddisfi la condizione diofantea

$$|\langle k, \lambda \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} , \quad \gamma > 0 , \tau > n - 1 , 0 \neq k \in \mathbb{Z}^n . \quad (3)$$

dove  $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$ . Allora per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo esiste una trasformazione canonica prossima all'identità

$$q = q' + \varepsilon\varphi(p', q') , \quad p = p' + \varepsilon\psi(p', q') \quad (4)$$

che pone l'Hamiltoniana (2) nella forma normale di Kolmogorov

$$H'(p', q') = \sum_j \lambda_j p_j' + O(p'^2) . \quad (5)$$

La conseguenza immediata è che esiste un toro  $p'$ , determinato tramite la trasformazione (4), che resta invariante per l'Hamiltoniana perturbata, e che le orbite su quel toro hanno ancora frequenze  $\lambda$ . Infatti, dalle equazioni di Hamilton

$$\dot{q}' = \lambda + O(p') , \quad \dot{p}' = O(p'^2)$$

per l'Hamiltoniana (5) si vede subito che imponendo le condizioni iniziali  $p'(0) = 0$  e  $q'(0) = q_0$  arbitrario le soluzioni sono

$$q'(t) = q_0 + \lambda t , \quad p'(t) = 0 .$$

L'Hamiltoniana (1) si può riscrivere nella forma (2) richiesta dal teorema mediante uno sviluppo in serie di Taylor nelle azioni  $p$  intorno ad un qualunque punto  $p^*$  con frequenze  $\omega(p^*)$  diofantee. Se ne conclude che i tori imperturbati con frequenze diofantee non vengono distrutti da una piccola perturbazione, ma solo deformati, e mantengono il flusso del sistema imperturbato. Facendo uso della teoria diofantea si mostra poi che la misura del complemento dei tori che persistono tende a zero con  $\varepsilon$ , sicché la maggioranza dei tori imperturbati sopravvive alla perturbazione.

Una delle principali difficoltà nell'applicare il teorema a sistemi di interesse fisico, incluso naturalmente il sistema solare, sta nello stabilire cosa significhi “per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo”. La dimostrazione del teorema fornisce anche una valutazione più o meno esplicita della soglia di applicabilità che denoteremo con  $\varepsilon^*$ , sicché il teorema si applica per  $\varepsilon < \varepsilon^*$ . Ma, osservava Hénon, una valutazione esplicita di  $\varepsilon^*$  sulla base delle prime dimostrazioni complete che siano state pubblicate, dovute a Moser<sup>[14]</sup> ed Arnold<sup>[1][2]</sup>, porta a concludere che nel caso del sistema solare la massa dei pianeti dovrebbe essere inferiore a quella di un protone. Occorre dunque migliorare in modo drastico le valutazioni della soglia di applicabilità del teorema.

Il metodo da noi seguito passa per una riformulazione costruttiva del teorema di Kolmogorov. Possiamo sintetizzare questa tecnica come segue.

Si sviluppa l'Hamiltoniana (2) in serie di Taylor delle azioni  $p$  ed in serie di Fourier negli angoli  $q$ , e la si riscrive come somma del tipo

$$H(p, q, \varepsilon) = \sum_j \lambda_j p_j + H_1(p, q, \varepsilon) + H_2(p, q, \varepsilon) + \dots \quad (6)$$

in modo che  $H_s(p, q, \varepsilon)$  contenga solo un numero finito di termini, essendo polinomio nelle azioni e polinomio trigonometrico negli angoli di grado finito, e che la sua norma, ad esempio il massimo modulo della funzione, sia  $O(\varepsilon^s)$ , sicché per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo la serie è uniformemente convergente. Ciascuna delle funzioni  $H_s(p, q, \varepsilon)$  contiene dei termini della forma  $A_s(q)$ , indipendente dalle azioni, e  $\sum_j B_{s,j}(q)p_j$ , lineare nelle azioni, che devono essere rimossi per porre l'Hamiltoniana in forma normale di Kolmogorov.

Il primo passo consiste nel rimuovere da  $H_1$  i termini indesiderati, Ciò si ottiene costruendo una trasformazione canonica definita mediante due funzioni generatrici  $\chi_1(q) = X(q) + \xi$ , e  $\chi_2(p, q) = \sum_j Y_j(q)p_j$ , dove  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $X(q)$ ,  $Y_j(q)$  sono polinomi trigonometrici al pari delle  $H_s$ . Le generatrici vengono determinate in modo che l'Hamiltoniana trasformata abbia ancora la forma (6), ma con  $H_1$  in forma normale, nel senso che dipende almeno quadraticamente dalle azioni. Si itera poi il procedimento eliminando successivamente i termini indesiderati da  $H_2, H_3, \dots$ , sicché dopo un numero finito  $r$  di passi si ha un'Hamiltoniana della forma

$$H^{(r)}(p, q, \varepsilon) = \sum_j \lambda_j p_j + Z_1(p, q, \varepsilon) + \dots + Z_r(p, q, \varepsilon) + \mathcal{R}(p, q, \varepsilon), \quad (7)$$

dove le funzioni  $Z_1, \dots, Z_r$  sono in forma normale di Kolmogorov, mentre  $\mathcal{R}(p, q, \varepsilon)$  è un resto non ancora normalizzato di ordine  $O(\varepsilon^{r+1})$ .

Dal punto di vista teorico si può giustificare completamente il metodo, mostrando che se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo da garantire che le norme delle funzioni generatrici decrescano in progressione geometrica, allora la successione delle trasformazioni converge effettivamente ad una Hamiltoniana  $H^{(\infty)}(p, q)$  in forma normale di Kolmogorov. Il lettore interessato potrà trovare una dimostrazione completa in [6].

Ai fini dell'applicazione ad un modello di interesse fisico seguiamo un procedimento proposto da Gallavotti ed usato per la prima volta in [3]. L'osservazione elementare è che se si costruisce esplicitamente la forma normale di Kolmogorov ad un ordine finito  $r$ , ottenendo così un'Hamiltoniana della forma (7), allora la condizione di applicabilità del teorema, che per l'Hamiltoniana (2) si scrive  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , diventa invece del tipo  $\varepsilon^r < \varepsilon^*$ ; questo introduce un miglioramento evidente.

La costruzione esplicita della forma normale ad un ordine finito deve necessariamente svolgersi con manipolazione algebrica al calcolatore, e richiede

un lavoro paziente ed accurato per scegliere in modo conveniente sia il criterio di troncamento delle serie, sia l'ordine  $r$  di normalizzazione. L'ostacolo principale sta nel numero di termini da calcolare, sia per lo sviluppo di Taylor che per quello di Fourier. In effetti, si arriva facilmente a produrre funzioni che contengono un numero di termini dell'ordine di qualche milione, il che, se non rappresenta un problema insormontabile dal punto di vista della memoria, diventa del tutto impraticabile per il tempo di calcolo richiesto. Per rendersene conto si pensi, ad esempio, che per calcolare il prodotto di due funzioni ciascuna delle quali contiene  $10^7$  termini occorre eseguire  $10^{14}$  operazioni di prodotto tra monomi (decisamente più complesso della moltiplicazione tra due numeri). Anche con un calcolatore in grado di eseguire  $10^6$  prodotti di questo tipo al secondo occorrerebbero  $10^8$  secondi, il che equivale a circa tre anni.

Si deve anche osservare che un tal calcolo non è eseguibile con un manipolatore algebrico di tipo commerciale, ma occorre sviluppare un pacchetto orientato alla manipolazione delle serie che si usano effettivamente, nel nostro caso polinomi nelle azioni e polinomi trigonometrici negli angoli. In effetti, per ottenere il risultato riportato in questa nota abbiamo sviluppato appositamente tutti i programmi necessari.

### 3 L'applicazione al problema planetario dei tre corpi

Nel caso del problema dei tre corpi occorre un lungo lavoro di preparazione per porre l'Hamiltoniana nella forma (2), richiesta per applicare il teorema di Kolmogorov. Lo schema da noi seguito prevede tre fasi, che illustriamo in modo alquanto sintetico. Il lettore interessato a conoscere maggiori dettagli potrà consultare i lavori [11] e [12], ove si dà una descrizione più completa dello schema di calcolo e si rimanda alle referenze appropriate.

La prima fase segue fedelmente gli sviluppi perturbativi classici. Si fa riferimento agli *elementi orbitali*: l'*inclinazione*  $\iota$  e la *longitudine del nodo*  $\Omega$ , che determinano la giacitura del piano dell'orbita rispetto ad un riferimento assoluto (solidale con le stelle fisse); l'*eccentricità*  $e$  che determina la distanza del fuoco dal centro e l'*argomento del perielio*  $\omega$ , che determina l'orientamento dell'ellisse rispetto al nodo; il *semiasse maggiore*  $a$  che determina la dimensione dell'ellisse e l'*anomalia media*  $\ell$ , che evolvendo uniformemente nel tempo descrive il moto del pianeta sull'orbita. In sostanza, gli elementi orbitali descrivono l'approssimazione kepleriana del moto planetario. Si tiene poi conto delle leggi di conservazione, applicando i procedimenti

classici di eliminazione del moto del baricentro e di riduzione del momento angolare. Si introducono infine le *variabili canoniche di Poincaré* definite in termini degli elementi orbitali come

$$\begin{aligned}\Lambda_j &= \mu_j \sqrt{G(m_0 + m_j)a_j}, & \xi_j &= \sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \cos(\omega_j + \Omega_j), \\ \lambda_j &= \ell_j + \omega_j + \Omega_j, & \eta_j &= -\sqrt{2\Lambda_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2}} \sin(\omega_j + \Omega_j),\end{aligned}$$

dove  $j = 1, 2$  e  $\mu_j = m_0 m_j / (m_0 + m_j)$  sono le masse ridotte dei due pianeti. Le inclinazioni e le longitudini dei nodi non compaiono grazie alla riduzione del momento angolare. Nelle variabili di Poincaré l'Hamiltoniana assume la forma

$$H(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) = H_0(\Lambda) + \varepsilon H_1(\Lambda, \lambda, \xi, \eta) \quad (8)$$

dove

$$H_0(\Lambda) = - \sum_{j=1}^2 \frac{G^2 \mu_j^3 (m_0 + m_j)^2}{2\Lambda_j^2} \quad (9)$$

descrive il moto puramente kepleriano dei singoli pianeti, e  $H_1(\Lambda, \lambda, \xi, \eta)$  è la perturbazione che include le interazioni tra i pianeti. Il parametro  $\varepsilon$  nel nostro caso è il rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole, che risulta  $\varepsilon \simeq \frac{1}{1047.355}$ . Una delle parti più laboriose del calcolo riguarda lo sviluppo della perturbazione  $H_1$  in serie di potenze in  $\Lambda, \xi, \eta$  ed in serie di Fourier negli angoli  $\lambda$ .

La seconda fase consiste nella rimozione della degenerazione del sistema  $H_0$  mediante l'introduzione delle *frequenze secolari* che descrivono i moti dei perieli dei pianeti. Si fissano anzitutto i valori  $\Lambda = \Lambda^*$  (in pratica i semiassi maggiori) in modo che le frequenze corrispondenti, calcolate tramite  $H_0$ , siano quelle del moto Kepleriano. Si procede poi alla costruzione del cosiddetto *sistema secolare* calcolando le medie sugli angoli veloci  $\lambda$  fino al secondo ordine in  $\varepsilon$ . Ignorando momentaneamente la dipendenza da  $\lambda$  nell'Hamiltoniana risultante si ritrova l'approssimazione di Lagrange e Laplace per il calcolo dei moti dei perieli. Ciò tuttavia non è sufficiente: occorre ancora calcolare una forma normale di Birkhoff per le variabili lente  $\xi, \eta$ , passare a variabili d'azione ed angolo in queste variabili e determinare i valori delle azioni corrispondenti alle frequenze secolari effettive dei pianeti. Alla fine di questa fase si ha un'Hamiltoniana che ha la forma richiesta per la costruzione della forma normale di Kolmogorov.

La terza fase consiste nell'applicazione dell'algoritmo di Kolmogorov fino ad un ordine finito. Lo schema di calcolo seguito è quello accennato nel paragrafo 2. Occorre però fare una precisazione sull'uso della condizione

diofantea (3): la rappresentazione finita del calcolatore rende ovviamente impossibile verificarla, così come non è possibile stabilire se le frequenze reali dei pianeti la soddisfino. Questo però non crea problemi particolari ai fini del calcolo da noi svolto. Infatti tenendo conto solo di un numero finito di termini nello sviluppo di Fourier basta che la condizione sia soddisfatta per tutti i  $k \in \mathbb{Z}^n$  tali che  $0 < |k| \leq K$  per un  $K$  intero opportuno. Questa è una condizione verificabile senza particolari difficoltà. La condizione diofantea per tutti i  $k$  entra in gioco solo nel momento in cui si debbano applicare le stime analitiche, ma a questo punto è sempre possibile, ed in molti modi, completare la rappresentazione decimale delle frequenze in modo diofanteo.

La prima verifica dell'applicabilità del teorema consiste nel controllare che le norme delle funzioni generatrici decrescano geometricamente, operazione fattibile per quelle che sono state calcolate in modo esplicito. Alla luce della teoria sviluppata in [6] ciò costituisce, se non una prova rigorosa, almeno una forte indicazione della convergenza del procedimento.

Una prova rigorosa richiederebbe una stima dei resti, ossia delle parti di Hamiltoniana non ancora normalizzate, in modo da poter applicare le stime teoriche. Un tale calcolo resta però troppo oneroso per i mezzi di calcolo a nostra disposizione, sicché non ci è stato possibile svolgerlo.

## 4 Il sistema Sole–Giove–Saturno

In questo paragrafo riportiamo alcuni dettagli tecnici sul calcolo effettivamente svolto.

Premettiamo una precisazione. Il confronto diretto dei risultati del nostro calcolo con le orbite reali dei pianeti è chiaramente impossibile, principalmente per due ragioni. La prima è che il sistema solare comprende molti altri corpi, ed in particolare altri due pianeti giganti (Urano e Nettuno), sicché la dinamica del sistema reale differisce da quella calcolata mediante l'approssimazione del problema dei tre corpi. La seconda ragione è che la determinazione delle frequenze, in particolare quelle secolari, sulla base dei dati astronomici non è sufficientemente precisa: l'arco di tempo coperto dalle osservazioni disponibili è troppo breve. Di conseguenza, consideriamo come sistema reale quello descritto dalle equazioni di Newton per il problema dei tre corpi quando si prendano come masse quelle del Sole, di Giove e di Saturno, e come dati iniziali gli elementi orbitali osservati. I valori numerici sono riportati nella tabella 1.

Per il calcolo delle frequenze abbiamo fatto uso del metodo di analisi in frequenza di Laskar applicato alle orbite calcolate per integrazione diretta



Tabella 1: Masse ed elementi orbitali eliocentrici di Giove e Saturno calcolati dal JPL per il Giorno Giuliano (JD) 2451220.5 . Le lunghezze sono in Unità Astronomiche (UA); i tempi in anni; la costante gravitazionale è  $G = 1$  . In queste unità la massa del Sole è  $4\pi^2$  .

		Giove ( $j = 1$ )	Saturno ( $j = 2$ )
massa	$m_j$	$(2\pi)^2/1047.355$	$(2\pi)^2/3498.5$
semiasse maggiore	$a_j$	5.20092253448245	9.55716977296997
anomalia media	$\ell_j$	6.14053316064644	5.37386251998842
eccentricità	$e_j$	0.04814707261917873	0.05381979488308911
argomento del perielio	$\omega_j$	1.18977636117073	5.65165124779163
inclinazione	$i_j$	0.006301433258242599	0.01552738031933247
longitudine del nodo	$\Omega_j$	3.51164756250381	0.370054908914043

Tabella 2: Frequenze angolari di Giove e Saturno in radianti/anno, calcolate col metodo dell'analisi in frequenza di Laskar. Con  $\tilde{n}_1^*, \tilde{n}_2^*$  indichiamo le frequenze (veloci) del moto medio; con  $g_1^*, g_2^*$  le frequenze (lente) di precessione dei perieli.

Giove	Saturno
$\tilde{n}_1^* = 0.31643597303390$	$\tilde{n}_2^* = 0.10298153012338$
$g_1^* = -0.00014577520419$	$g_2^* = -0.00026201915143$

delle equazioni di Newton su un arco di tempo pari a  $2^{24}$  anni. I valori calcolati sono riportati nella tabella 2.

La scelta dei parametri di troncamento degli sviluppi richiede qualche attenzione: occorre da un lato mantenere un numero di termini sufficientemente alto da garantire una precisione accettabile, ed allo stesso tempo non troppo grande, altrimenti il calcolo diventerebbe di fatto impossibile. Come criterio di controllo della precisione abbiamo scelto il confronto tra i valori dell'energia calcolati nei sistemi di coordinate determinati ad ogni passo del procedimento, verificando che l'errore relativo massimo restasse dell'ordine di  $10^{-8}$ . In tal modo abbiamo potuto contenere il numero di coefficienti nell'espressione finale delle serie entro  $10^7$ , costruendo la forma normale di Kolmogorov fino all'ordine 17.

Il comportamento delle norme delle funzioni generatrici che trasformano l'Hamiltoniana nella forma normale di Kolmogorov è rappresentato in

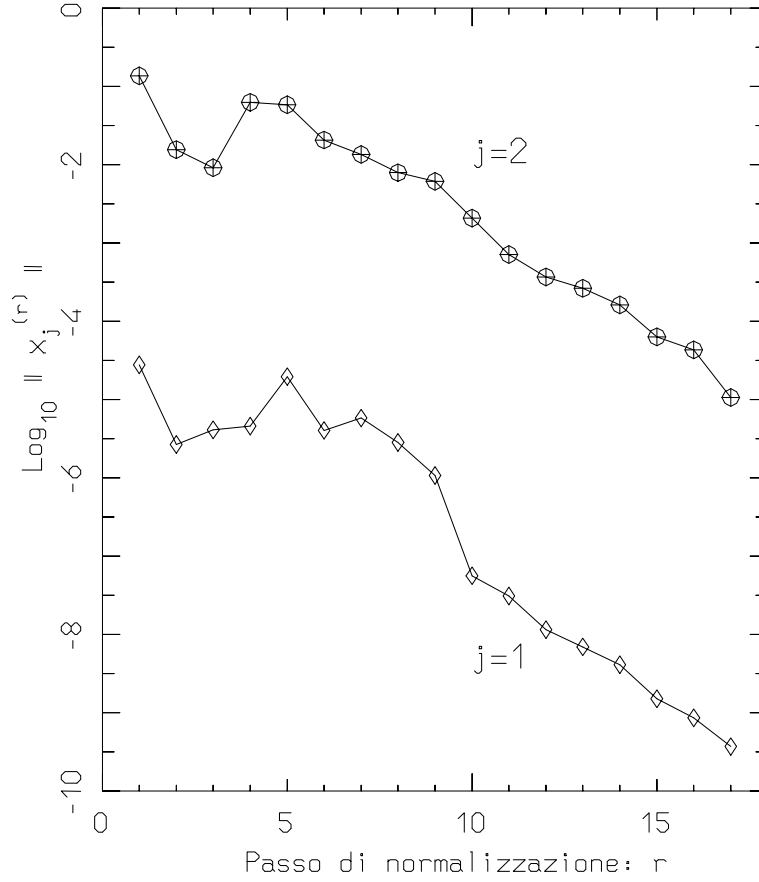


Figura 1: Ad illustrazione della convergenza dell'algoritmo di costruzione della forma normale di Kolmogorov. Sono riportate in scala semilogaritmica le norme della funzione generatrice  $\chi_1$  (in basso, corrispondentemente al simbolo  $\diamond$ ) e  $\chi_2$  (in alto, con il simbolo  $\oplus$ ) in funzione del passo di normalizzazione  $r$ . La decrescita geometrica dopo i primi passi risulta evidente.

figura 1. Si vede con chiarezza che a partire da un certo ordine le norme decrescono con ragione geometrica. Alla luce dei risultati teorici si può considerare questo comportamento come una forte indicazione della convergenza del procedimento.

Infine, abbiamo confrontato la dinamica calcolata per integrazione diretta con quella dedotta calcolando il flusso quasi periodico sul toro approssimato dato dalla forma normale di Kolmogorov dopo aver svolto tutte le trasformazioni di coordinate necessarie. Il risultato è riassunto in tabella 3. Si può osservare che l'errore relativo sui semiassi maggiori resta alquanto contenuto, mentre quello sulle altre quantità resta accettabile.

Riteniamo dunque che il nostro calcolo, pur non essendo completamente

Tabella 3: Differenza massima tra gli elementi orbitali calcolati per integrazione diretta e quelli calcolati mediante il flusso quasi periodico sul toro. Il confronto è fatto su un arco di tempo pari a  $10^8$  anni.

	$\left  \frac{\Delta a(t)}{a(t)} \right $	$ \Delta \lambda(t) $	$\left  \frac{\Delta e(t)}{e(t)} \right $	$ \Delta \omega(t) $
Giove	$1.5 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-3}$
Saturno	$6.8 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$4.3 \times 10^{-3}$	$7.7 \times 10^{-3}$

rigoroso, ci permetta di concludere che il teorema di Kolmogorov si applica al sistema Sole–Giove–Saturno.

## 5 Possibili sviluppi

È del tutto spontaneo chiedersi se il metodo usato in questo lavoro possa estendersi fino a risolvere la questione posta fin dall’inizio, cioè se il teorema di Kolmogorov possa realmente dare una risposta definitiva alla domanda se il sistema solare sia stabile. Allo stato attuale vi sono buoni motivi per pensare che la risposta sia negativa.

Anzitutto, occorre fissare il modello: la scelta abituale consiste nel considerare il Sole ed i nove pianeti tradizionalmente classificati come tali, escludendo quindi satelliti, asteroidi e comete la cui influenza sulla dinamica viene ritenuta trascurabile (ed ignorando le recenti discussioni sul fatto che Plutone debba o no considerarsi un pianeta). Pur con questa riduzione, le simulazioni numeriche eseguite negli ultimi trent’anni hanno progressivamente messo in evidenza l’esistenza di una componente caotica nel moto dei pianeti, visibile sull’arco di parecchi milioni di anni. Ciò è vero in particolare per i pianeti minori, inclusa la nostra Terra. Un tal comportamento è incompatibile con il moto quasi periodico previsto dal teorema di Kolmogorov, e dunque un tentativo di dimostrarne l’applicabilità all’intero sistema solare sarebbe verosimilmente destinato all’insuccesso.

Un obiettivo più modesto sarebbe dimostrare l’applicabilità del teorema di Kolmogorov ad un sistema planetario ridotto, rappresentato dal Sole e dai quattro pianeti maggiori (Giove, Saturno, Urano e Nettuno), per i quali le indicazioni numeriche rivelano al più una componente caotica molto debole. Un tal problema si potrebbe affrontare in linea di principio seguendo lo schema illustrato in questa nota, ma allo stato attuale non è facile superare l’ostacolo rappresentato dalla mole di calcoli necessaria.

Dal momento che il teorema di Kolmogorov non sembra in grado di risol-

vere il problema della stabilità, diventa naturale chiedersi se esista un'altra via d'uscita. Esiste in effetti una possibile alternativa, alla cui base sta l'osservazione che non è strettamente necessario dimostrare la stabilità del sistema planetario per tempo infinito: basta mostrare che esso può mantenersi praticamente nella situazione attuale per un tempo sufficientemente lungo, ad esempio l'età dell'universo, stimata in  $10^{18}$  secondi. Il riferimento teorico è il teorema di Nekhoroshev<sup>[16][17]</sup>: *se la parte imperturbata  $h(p)$  dell'Hamiltoniana (1) soddisfa ad una condizione di convessità (o di steepness) e se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo, allora vale  $|p(t) - p(0)| = O(\varepsilon^b)$  per  $|t| < T_* \exp((\varepsilon^*/\varepsilon)^a)$ , con  $a, b, \varepsilon^*$  e  $T_*$  costanti positive.* In breve, le azioni del sistema, che nel caso planetario sono praticamente semiassi maggiori, eccentricità ed inclinazioni delle orbite, hanno una variazione piccola per tempi esponenzialmente lunghi nell'inverso della perturbazione.

Il fatto rilevante è che la dipendenza esponenziale fa crescere molto rapidamente il tempo di stabilità, che potrebbe facilmente raggiungere l'età dell'universo. Dimostrare un tale risultato per il sistema solare è ancora fuori dalla nostra portata, ma alcune applicazioni alla dinamica degli asteroidi hanno dato risultato positivo, il che sembra promettente<sup>[7][4]</sup>. Per inciso, il teorema di Nekhoroshev si applica a dati iniziali in un aperto, il che è perfettamente compatibile con l'inevitabile errore nella determinazione delle posizioni dei pianeti mediante le osservazioni. Non può dirsi altrettanto per il teorema di Kolmogorov, perché l'insieme dei tori invarianti ha un complemento aperto e denso.

A quanto abbiamo detto si deve aggiungere un'ulteriore osservazione. Se tentassimo di considerare tutti i corpi del sistema solare, ivi compresi satelliti, asteroidi e comete, sarebbe impresa disperata dal punto di vista matematico. Ma è ragionevole assumere che l'azione di tutti questi corpi sui pianeti, o almeno sui quattro maggiori, si possa riassumere in una dipendenza delle equazioni dal tempo di cui non si sa dire nulla di preciso, tranne che debba essere molto piccola. Il fatto interessante è che il teorema di Nekhoroshev continua a mantenere la sua validità anche nel caso di una debole dipendenza temporale nell'Hamiltoniana<sup>[5]</sup>.

A questo punto viene probabilmente spontanea una domanda: perché insistere tanto sull'applicazione del teorema di Kolmogorov al sistema solare, dal momento che sembra esistere un'alternativa più promettente? La risposta è nella relazione tra i due teoremi. In anni recenti è stato dimostrato che un toro invariante di Kolmogorov ammette un intorno che è non solo esponenzialmente, ma superesponenzialmente stabile<sup>[13][8]</sup>, nel senso che il tempo necessario perché le azioni del sistema cambino di una quantità significativa cresce come  $\exp(\exp((\varepsilon^*/\varepsilon^a)))$ . La dimostrazione dell'applicabilità

del teorema di Kolmogorov diventa dunque il primo passo per stabilire un risultato di stabilità di tipo esponenziale. Anche qui, lo schema di calcolo segue una via già tracciata, almeno nelle sue linee essenziali. Il problema è avere a disposizione una potenza di calcolo sufficiente, ma il continuo incremento delle prestazioni dei calcolatori lascia ben sperare in ulteriori progressi nel corso dei prossimi anni.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Arnold, V. I.: *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Usp. Mat. Nauk, **18**, 13 (1963); Russ. Math. Surv., **18**, 9 (1963).
- [2] V.I. Arnold: *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Usp. Math. Nauk **18** N.6, 91 (1963); Russ. Math. Surv. **18** N.6, 85 (1963).
- [3] Celletti, A., Falcolini, C. and Porzio, A.: *Rigorous numerical stability estimates for the existence of KAM tori in a forced pendulum*, Ann. Inst. H. Poincaré, **47**, 85–111 (1987).
- [4] C. Efthimiopoulos, Z. Sándor: *Optimized Nekhoroshev stability estimates for the Trojan asteroids with a symplectic mapping model of co-orbital motion*, Mon. Not. R. Astron. Soc., (2005).
- [5] A. Giorgilli, E. Zehnder: *Exponential stability for time dependent potentials*, ZAMP (1992).
- [6] A. Giorgilli, U. Locatelli: *Kolmogorov theorem and classical perturbation theory*, ZAMP **48**, 220–261 (1997).
- [7] A. Giorgilli, Ch. Skokos: *On the stability of the Trojan asteroids*, Astron. Astroph. **317**, 254–261 (1997).
- [8] A. Giorgilli, A. Morbidelli: *Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems*, ZAMP **48**, 102–134 (1997).
- [9] A.N. Kolmogorov: *Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **98**, 527 (1954).
- [10] Laskar, J.: *Introduction to frequency map analysis*, in C. Simò (managing ed.), Proceedings of the NATO ASI school: “Hamiltonian Systems

- with Three or More Degrees of Freedom”, S’Agaro (Spain), June 19–30, 1995, Kluwer, 134–150 (1999).
- [11] U. Locatelli, A. Giorgilli: *Construction of the Kolmogorov’s normal form for a planetary system*, Regular and Chaotic Dynamics, **10**, n.2, 153–171 (2005).
  - [12] U. Locatelli, A. Giorgilli: *Invariant tori in the Sun–Jupiter–Saturn system*, DCDS-B **7**, 377 - 398 (2007).
  - [13] A. Morbidelli, A. Giorgilli: *Superexponential stability of KAM tori*, J. Stat. Phys. **78**, 1607–1617 (1995).
  - [14] J. Moser: *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl II, 1–20 (1962).
  - [15] Moser, J.: *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton University press, Princeton (1973).
  - [16] N.N. Nekhoroshev: *Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems*. Russ. Math. Surveys, **32**, 1 (1977).
  - [17] N.N. Nekhoroshev: *Exponential estimates of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems*, 2. Trudy Sem. Petrovs., **5**, 5 (1979).
  - [18] Robutel, P.: *Contribution à l’étude de la stabilité du problème planétaire des trois corps*, Ph.D. thesis, Observatoire de Paris (1993).
  - [19] Robutel, P.: *Stability of the Planetary Three–Body Problem – II. KAM Theory and Existence of Quasiperiodic Motions*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **62**, 219–261 (1995).